

### 3. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

#### 3.2. Integrales dobles sobre otros recintos

##### Recintos elementales

- Un **recinto elemental de tipo I**, también llamado  **$x$ -proyectable** ó  **$x$ -simple**, es cualquier conjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  definido por:

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

donde  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ .

- Un **recinto elemental de tipo II**, también llamado  **$y$ -proyectable** ó  **$y$ -simple**, es cualquier conjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  definido por:

$$S = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

donde  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas con  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ , para todo  $y \in [c, d]$ .

##### Teorema (Integral doble sobre recintos $x$ -proyectables)

Sean  $S \subset \mathbb{R}^2$  una región  $x$ -proyectable, es decir:

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad \text{con } \varphi_1 \leq \varphi_2 \text{ funciones continuas en } [a, b]$$

y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y continua en  $\overset{\circ}{S}$ . Entonces,  $f$  es integrable Riemann sobre  $S$  y

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

##### Observación

El resultado del anterior teorema sigue siendo válido si el conjunto de discontinuidades de  $f$  en el interior de  $S$  tiene contenido 2-dimensional nulo, y  $\tilde{f}$  es integrable respecto de  $y$  en  $[m, M]$  para todo  $x \in [a, b]$  ( $m$  y  $M$  son el ínfimo y el supremo de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , respectivamente), lo que se consigue si para todo  $x \in [a, b]$  el conjunto de discontinuidades de  $f(x, y)$  en  $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$  tienen contenido 1-dimensional nulo.

##### Teorema (Integral doble sobre recintos $y$ -proyectables)

Sean  $S \subset \mathbb{R}^2$  una región  $y$ -proyectable, es decir:

$$S = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \quad \text{con } \psi_1 \leq \psi_2 \text{ funciones continuas en } [c, d]$$

y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada y continua en  $\overset{\circ}{S}$ . Entonces,  $f$  es integrable Riemann sobre  $S$  y

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

##### Ejemplo

Calcula la integral de  $f(x, y) = x^3 y + \cos x$  sobre el recinto  $x$ -proyectable

$$S = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x \right\}$$

Observa que este recinto también es  $y$ -proyectable, haz la integral como tal, y comprueba que se obtiene el mismo resultado.

## Cambio de orden en la integración

Cuando una región  $S \subset \mathbb{R}^2$  es  $x$ -proyectable e  $y$ -proyectable, es decir:

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

para cualquier función  $f$  continua en  $\overset{\circ}{S}$ , se cumple que:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

El paso de una integral iterada a otra se llama **cambio de orden en la integración**, y tiene sentido cuando la integral iterada inicial es más difícil de hallar que la otra.

### Ejemplo

Cambia el orden de integración en la integral iterada

$$I = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy$$

Calcula la integral resultante, y comprueba que es más fácil de hallar que la original.

## Aplicaciones geométricas de la integral doble

- **Cálculo de volúmenes.** Si  $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in S \text{ y } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$ , con  $f$  y  $g$  integrables sobre  $S$ , entonces el volumen de  $\Omega$  es:

$$V(\Omega) = \iint_S (g(x, y) - f(x, y)) dx dy$$

- **Cálculo de áreas planas.** El área del recinto  $S \subset \mathbb{R}^2$  es:

$$A(S) = \iint_S dx dy$$

### Ejemplo

Calcula el volumen del tetraedro limitado por los planos  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  y  $x - y - z + 1 = 0$ .

## Ejercicios

1. Halla la integral de las siguientes funciones sobre el recinto que en cada caso se indica:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , sobre la región acotada del primer cuadrante limitada por la recta  $3x + 4y = 10$ .
- (b)  $f(x, y) = y$ , sobre el recinto  $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ .
- (c)  $f(x, y) = x^3 y$ , sobre la región acotada limitada por el eje  $y$  y la parábola  $x + 4y^2 = 3$ .
- (d)  $f(x, y) = xy \sin(x^2 - y^2)$ , sobre  $S = \{(x, y) : 0 < y < 1, x > y, x^2 - y^2 < 1\}$ .

2. Calcula el valor de la siguiente integral iterada, encuentra la integral doble (recinto y función) de la que proviene, intercambia el orden de integración (calculando su valor) y comprueba si se obtiene el mismo resultado.

$$\int_0^1 dx \int_1^{e^x} (x + y) dy$$

## Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. (a)  $\frac{5^6}{6^4} = \frac{15625}{1296}$ ; (b) 0; (c) 0; (d)  $\frac{1-\cos 1}{4}$ .
2.  $\frac{e^2-1}{4}$ .